

N° D'ORDRE

6

THÈSE D'ANALYSE

SUR LA

CONTINUITÉ DES FONCTIONS IMAGINAIRES

ET

DES SÉRIES EN PARTICULIER

Par H. LAURENT

OFFICIER DU GÉNIE

LICENCIÉ ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES



METZ

IMPRIMERIE ET LITHOGRAPHIE DE J. VERRONNAIS

—

1863

FACULTÉ DES SCIENCES DE NANCY.

PROFESSEURS :

MM. GODRON (O✠), Doyen, *Professeur d'Histoire naturelle.*
NIKLÈS (✠), *Professeur de Chimie.*
CHAUTARD, *Professeur de Physique.*
RENARD, *Professeur de Mathématiques.*
LAFON, *Professeur d'Astronomie et de mécanique.*

COMMISSION D'EXAMEN.

MM. CHAUTARD, *Président.*
RENARD.
LAFON.

La faculté a arrêté que les opinions émises dans les dissertations qui lui sont présentées doivent être considérées comme propres à leurs auteurs et qu'elle n'entend ni les approuver, ni les improuver.

THÈSE D'ANALYSE

SUR LA CONTINUITÉ DES FONCTIONS IMAGINAIRES

ET DES SÉRIES EN PARTICULIER.



PREMIÈRE PARTIE.

Le but que nous nous proposons dans cette première partie, est de montrer comment on peut donner une représentation géométrique, des fonctions de variables imaginaires.

Le mode de représentation dont il s'agit ici ne s'applique qu'aux fonctions monodromes et monogènes dans toute l'étendue du plan; ainsi dans tout ce qui va suivre, quand nous parlerons d'une fonction de variable imaginaire, il sera sous-entendu qu'elle est monodrome et monogène.

« Dès l'année 1806, MM. l'abbé Buée et Argand, en partant de cette idée que $\sqrt{-1}$ est un signe de perpendicularité, avaient donné des expressions imaginaires une interprétation géométrique contre laquelle des objections spécieuses ont été proposées. Plus tard, M. Argand et d'autres auteurs, particulièrement MM. Français, Faure, Mourey, Vallès, etc., ont publié des recherches qui avaient pour but de développer ou de modifier l'interprétation dont il s'agit. » (Cauchy, *Mémoire sur les quantités géométriques*, *Ex. d'analyse et de phys. math.*, tome IV, page 157).

« Une grande partie de ces recherches avait été, à ce qu'il parait, obtenue même avant le siècle présent, et dès l'année 1786, par un savant modeste, M. Henri-Dominique Truel, qui, après les avoir consignés dans divers manuscrits, les a communiqués, vers l'année 1810, à M. Augustin Normand, constructeur de vaisseaux au Hâvre. » (*Id.*)

Cauchy, dans ses nombreux et savants mémoires, a considérablement déve-

loppé les idées des géomètres qui viennent d'être cités. Mettant l'imaginaire $x + y\sqrt{-1}$ sous la forme $r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$, il la représenta tantôt par le point dont les coordonnées rectangulaires étaient x et y, tantôt par la droite de longueur r faisant dans un plan fixe, avec un axe fixe, l'angle θ.

Une imaginaire contenant en réalité deux quantités réelles, se représentait facilement à l'aide des deux coordonnées, rectilignes ou polaires d'un point; mais les variations d'une pareille quantité, se comparaient difficilement à ceux d'une quantité de même espèce. Pour rendre cette comparaison sensible à l'œil, il eût fallu quatre coordonnées pour un même point dans l'espace.

Voici comment on a fait pour sauver cette difficulté : désignant par $X + Y\sqrt{-1}$ une fonction de $x + y\sqrt{-1}$, on a considéré X et Y comme les ordonnées d'une surface dont x et y étaient les deux autres coordonnées. Les propriétés de ces surfaces ont été étudiées par M. Prouhet dans une note insérée à la suite du *Traité d'analyse* de Sturm.

Nous allons essayer, dans ce qui va suivre, de donner une représentation géométrique d'une fonction de $x + y\sqrt{-1}$ à l'aide d'une seule surface, dont nous étudierons les principales propriétés.

1.

Afin de simplifier le langage, nous appellerons *courbes d'égal module, courbes d'égal argument* de la fonction monodrome et monogène $f(z)$, les lieux des points où cette fonction a un module constant, un argument constant.

Nous appellerons surface représentative de $f(z)$, ou simplement *surface de* $f(z)$, la surface obtenue en élevant en chaque point du plan une ordonnée perpendiculaire et égale au module de la fonction $f(z)$ en ce point.

D'après cela, il est facile de voir que *les courbes d'égal module ne sont autre chose que les lignes de niveau de la surface de* $f(z)$.

La surface de $f(z)$ ne définit pas entièrement cette fonction, et en effet deux fonctions dont le rapport est une expression réduite, ont nécessairement même surface; mais réciproquement deux fonctions ayant même surface, ne peuvent différer que par un facteur constant qui est une expression réduite. Car puisque les deux fonctions en question ont même surface, elles ont même module en chaque point du plan.

Leur rapport a donc pour module l'unité; ce rapport ne pouvant donc devenir infini pour aucune valeur de z, est une constante. Ce qui démontre le fait que nous avions annoncé.

De là nous concluons qu'une fonction $f(z)$ monodrome et monogène est entièrement déterminée, quand on connaît sa surface et son argument en un point quelconque du plan.

2.

L'équation générale des courbes d'égal module de la fonction monodrome et monogène $f(z)$, est de la forme :

$$\text{Mod. } f(z) = \varsigma.$$

ς désignant une constante arbitraire. Cette équation équivaut à la suivante dans laquelle τ désigne un arc réel :

$$f(z) = \varsigma e^{\tau\sqrt{-1}}.$$

Soit α un zéro de $f(z)$, posons

$$z = \alpha + h,$$

h désignant une quantité assez voisine de 0 pour que dans le cercle de rayon $\widehat{\alpha h}$, ayant son centre en α, il n'y ait ni zéro ni infini de $f(z)$. On aura en vertu d'un théorème de Cauchy :

$$f(\alpha + h) = f(\alpha) + hf'(\alpha) + \frac{h^2}{2} f''(\alpha) + \dots\dots$$

Mais en supposant h infiniment petit, et en ne conservant que les termes du premier ordre, $f(\alpha)$ étant nul, on a :

$$f(\alpha + h) = hf'(\alpha),$$

c'est-à-dire

$$\varsigma e^{\tau\sqrt{-1}} = hf'(\alpha);$$

d'où l'on tire

$$h = \varsigma \frac{e^{\tau\sqrt{-1}}}{f'(\alpha)}.$$

Cette équation montre que le module de h reste sensiblement constant lorsque τ varie. En d'autres termes, *les courbes d'égal module correspondant à des valeurs infiniment petites du module de la fonction, sont des cercles.*

Si $f'(\alpha)$ était nul, cette démonstration tomberait en défaut ; mais il serait facile de la rétablir en prenant un terme de plus dans la série de Taylor.

Les courbes d'égal module, correspondant à des valeurs infinies de $f(z)$, *sont encore des cercles*, car ces courbes sont celles qui correspondent aux zéros de $\frac{1}{f(z)}$.

3.

Soient $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_m \ldots$ les zéros de $f(z)$, $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_n \ldots$ ses infinis ; si l'on suppose d'abord $s = 0$, les courbes d'égal module se réduisent à des points isolés, $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_m \ldots$, puis s croissant, elles deviennent d'abord de petits cercles, se modifient peu à peu et finissent par se rencontrer en donnant naissance à des nœuds ; les variations de forme que l'on obtient ainsi sont analogues à celles d'une lemniscate dont les foyers restent fixes. (La lemniscate, comme nous le verrons plus loin, est la courbe d'égal module des fonctions entières du second degré.)

4.

Avant d'aller plus loin, rappelons un théorème de Cauchy sur les fonctions monogènes, avec sa démonstration, afin de signaler un cas dans lequel ce théorème tombe en défaut. Posons :

$$f(z) = X + Y\sqrt{-1}$$
$$z = x + y\sqrt{-1}.$$

Si l'on suppose que $f(z)$ soit monogène, on a, en vertu d'un théorème connu :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dX}{dx} &= \frac{dY}{dy} \\ \frac{dX}{dy} &= -\frac{dY}{dx} \end{aligned}\right\} \quad (1);$$

or, on a :

$$dX^2 + dY^2 = \left(\frac{dX}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dY}{dx}\right)^2 \;\Bigg|\; dx^2 + 2\frac{dX}{dx}\cdot\frac{dX}{dy} + 2\frac{dY}{dx}\cdot\frac{dY}{dy} \;\Bigg|\; dx\,dy + \left(\frac{dX}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dY}{dy}\right)^2 \;\Bigg|\; dy^2.$$

c'est-à-dire, en vertu des équations précédentes :

$$dX^2 + dY^2 = (dx^2 + dy^2)\left[\left(\frac{dX}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dX}{dy}\right)^2\right].$$

Cette équation montre que les carrés des arcs élémentaires décrits par le point $X + Y\sqrt{-1}$ et le point $x + y\sqrt{-1}$, c'est-à-dire par le point $f(z)$ et le point z, sont proportionnels quelle que soit la direction dans laquelle se meut le point z ; Cauchy en a conclu la similitude de deux triangles infinitésimaux décrits simultanément par le point z et le point $f(z)$, de là ce théorème :

Si le point z *décrit deux lignes qui se coupent*, f(z) *décrira deux courbes qui se couperont sous le même angle.* Ce théorème tombe évidemment en défaut quand, au point d'intersection des courbes décrites par le point z, on a :

$$\frac{dX}{dx} = 0 \qquad \frac{dX}{dy} = 0,$$

et par suite, en vertu des relations (1),

$$\frac{dY}{dx} = 0 \qquad \frac{dY}{dy} = 0,$$

c'est-à-dire $$f'(z) = 0.$$

5.

Du théorème précédent, il résulte que *les courbes d'égal argument de la fonction* f(z) *sont les trajectoires orthogonales des courbes d'égal module de la même fonction;* en effet, quand la variable décrit les courbes d'égal module, la fonction décrit un cercle dont le centre est à l'origine; quand la variable décrit les courbes d'égal argument, la fonction décrit des droites passant par l'origine; dans ces deux cas la fonction décrivant des lignes orthogonales, la variable doit en décrire également.

Il n'y aura d'exception à cette règle qu'aux points où l'on aura $f'(z) = 0$, nous verrons que ces points sont les nœuds des courbes d'égal module.

Il résulte de là que *les courbes d'égal argument sont les projections des lignes de pente de la surface de* f(z).

6.

Les courbes d'égal argument passent toutes par les zéros et les infinis de f(z). Car en ces points l'argument de $f(z)$ est complétement arbitraire, en vertu du théorème § 4, *les diverses branches de courbe d'égal argument passant par un zéro simple ou un infini simple de* f(z), *feront entre elles, en ces points, des angles égaux aux différences des arguments de la fonction.* En un zéro double ceci n'aurait plus lieu comme on peut le constater sur la fonction z^2; car en ce point, on aurait $f'(z) = 0$.

7.

Proposons-nous actuellement de trouver l'équation de la surface de $f(z)$; à cet effet, posons

$$z = x + y\sqrt{-1} = re^{\theta\sqrt{-1}}$$
$$f(z) = ue^{\omega\sqrt{-1}}$$

u sera l'ordonnée de la surface cherchée, x, y ses deux autres coordonnées ; pour trouver son équation, il faut exprimer que la fonction $ue^{\omega\sqrt{-1}}$ est monogène ; or, on a :

$$\frac{d\left(ue^{\omega\sqrt{-1}}\right)}{dx + dy\sqrt{-1}} = e^{\omega\sqrt{-1}}\,\frac{\frac{du}{dx}dx + \frac{d\omega}{dy}dy + \sqrt{-1}\,u\left(\frac{d\omega}{dx}dx + \frac{d\omega}{dy}dy\right)}{dx + dy\sqrt{-1}}$$

pour que $f(z)$ soit monogène, il faut que le second membre de cette équation soit indépendant du rapport $\frac{dy}{dx}$, ce qui donne la relation

$$\frac{du}{dx} + \sqrt{-1}\,u\,\frac{d\omega}{dx} = \frac{1}{\sqrt{-1}}\left(\frac{du}{dy} + \sqrt{-1}\,u\,\frac{d\omega}{dy}\right)$$

qui se décompose en deux autres :

$$\left.\begin{aligned}\frac{du}{dx} &= u\,\frac{d\omega}{dx}\\ \frac{du}{dy} &= -u\,\frac{d\omega}{dx}\end{aligned}\right\}\quad (A).$$

Ces équations peuvent s'écrire :

$$\frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \frac{d\omega}{dy}$$
$$\frac{1}{u}\frac{du}{dy} = -\frac{d\omega}{dx}$$

si alors on différentie la première par rapport à x, la seconde par rapport à y, et si l'on ajoute, il vient :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{u}\frac{du}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{u}\frac{du}{dy}\right) = 0.$$

Telle est l'équation de la surface cherchée, telle est l'équation à laquelle doit satisfaire une fonction u pour être module de fonction monogène. Si dans cette équation on vient à faire :

$$lu = v,$$

il vient :

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} = 0 \quad (B).$$

Cette équation est l'équation différentielle d'une surface obtenue en élevant en chaque point du plan une ordonnée égale au logarithme du module de $f(z)$ en ce point; nous l'appellerons la seconde surface représentative de $f(z)$, ou simplement *la seconde surface de* f (z). Les lignes de niveau et de pente de cette seconde surface ont encore pour projections les lignes d'égal module et d'éga argument de $f(z)$.

8.

Au lieu d'éliminer ω entre les équations (A) on aurait pu éliminer u en différentiant les mêmes équations que tout à l'heure, seulement en différentiant la première par rapport à y, la seconde par rapport à x et en retranchant. On trouve ainsi :

$$\frac{d^2\omega}{dx^2} + \frac{d^2\omega}{dy^2} = 0.$$

Telle est la condition que doit remplir une fonction ω pour être argument d'une fonction monogène.

9.

La considération des surfaces représentatives de la fonction $f(z)$, facilite la discussion des courbes d'égal module et d'égal argument, comme nous allons voir.

Nous avons vu § 3, que les courbes d'égal module en se déformant peu à peu, finissaient par se rencontrer, ce qui donnait lieu à des nœuds. En ces points, on a $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$, ou bien, si l'on se rappelle que :

$$u = \text{constante}$$

est l'équation des courbes d'égal module :

$$\frac{du}{dx} = 0 \qquad \frac{du}{dy} = 0,$$

c'est-à-dire :

$$du = 0.$$

Cette relation prouve que, dans le voisinage du nœud, le module u prend un accroissement du second ordre quand z en prend un du premier; $f(z)$ dans les mêmes circonstances prendra un accroissement du même ordre que son module ; donc, au nœud, on a :

$$df(z) = 0 \quad \text{ou} \quad f'(z) = 0,$$

donc les nœuds sont les zéros de la dérivée de $f(z)$.

10.

Lorsqu'une courbe d'égal module a un nœud, les tangentes au nœud partagent le plan en parties égales.

Pour démontrer cette proposition, considérons la seconde surface de $f(z)$, son équation est :

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} = 0 \qquad (1);$$

le plan tangent horizontal à cette surface coupe précisément cette surface suivant une courbe d'égal module à nœud, et l'équation précédente montre du reste que l'indicatrice est une hyperbole équilatère ; or, les asymptotes de cette hyperbole sont précisément les tangentes au nœud, ce qui démontre le théorème pour le cas d'un nœud ordinaire à quatre branches.

Mais si au nœud on avait à la fois :

$$\frac{d^2v}{dx^2} = 0 \qquad \frac{d^2v}{dy^2} = 0,$$

il y aurait plus de quatre branches, et du reste, l'indicatrice ne serait plus une courbe du second degré.

Différentions n fois l'équation (1) par rapport à x, puis $n-1$ fois par rapport à x, et une fois par rapport à y, etc...., nous obtiendrons les égalités suivantes :

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d^{n+2}v}{dx^{n+2}} + \dfrac{d^{n+2}v}{dx^n\,dy^2} = 0 \\ \dfrac{d^{n+2}v}{dx^{n+1}\,dy} + \dfrac{dv^{n+2}}{dx^{n-1}\,dy^3} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{d^{n+2}v}{dx^2\,dy^n} + \dfrac{d^{n+2}v}{dy^{n+2}} = 0 \end{array}\right\} \quad (2).$$

Si nous supposons alors nulles au nœud, toutes les dérivées de v d'ordre inférieur à $n+2$, l'équation de l'indicatrice sera :

$$\eta^{n+2}\frac{d^{n+2}v}{dy^{n+2}} + \frac{n+2}{1}\eta^{n+2}\xi\frac{d^{n+2}}{dy^{n+1}dx} + \text{etc.}\dots = \text{constante},$$

équation dans laquelle η, ξ sont les coordonnées courantes ; les asymptotes de cette courbe sont les tangentes au nœud. Cherchons donc ces asymptotes ; $tg\,\mu$ dé-

signant leur coefficient angulaire, on a, en appliquant une règle bien connue:

$$\operatorname{tg}^{n+2}\mu \quad \frac{d^{n+2}v}{dy^{n+2}} + \frac{n+2}{1} \operatorname{tg}\mu^{n+1} \frac{d^{n+2}v}{dy^{n+1}dx} + \ldots . = 0,$$

ou bien en vertu des équations (2):

$$\left(\operatorname{tg}^{n+2}\mu - \frac{(n+2)(n+1)}{1.\ 2} \operatorname{tg}^{n}\mu + \ldots ..\right)\frac{d^{n+2}v}{dy^{n+2}} + \left(\frac{n+2}{1} \operatorname{tg}^{n+1}\mu - \ldots ..\right)\frac{d^{n+2}v}{dy^{n+1}dx} = 0,$$

et multipliant par $\mathrm{Cos.}^{n+2}\mu$:

$$\left(\mathrm{Sin.}^{n+2}\mu - \frac{n+2}{1.\ 2}\mathrm{Sin.}^{n}\mu\,\mathrm{Cos.}^{2}\mu + \ldots\right)\frac{d^{n+2}v}{dy^{n+2}} + \left(\frac{n+2}{1}\mathrm{Sin.}^{n+1}\mu\,\mathrm{Cos.}\,\mu - \ldots\right)\frac{d^{n+2}v}{dy^{n+1}dx} = 0$$

ce que l'on peut écrire

$$\mathrm{Cos.}\,(n+2)\left(\frac{\pi}{2} - \mu\right)\frac{d^{n+2}v}{dy^{n+2}} + \mathrm{Sin.}\,(n+2)\left(\frac{\pi}{2} - \mu\right)\frac{d^{n+2}v}{dy^{n+1}dx} = 0.$$

De cette équation, on tire :

$$\operatorname{tg}(n+2)\left(\frac{\pi}{2} - \mu\right) = -\frac{\dfrac{d^{n+2}v}{dy^{n+2}}}{\dfrac{d^{n+2}v}{dx^{n+1}dy}}$$

et par suite on voit que l'angle μ aura $n+2$ valeurs en progression arithmétique, dont la raison est $\frac{\pi}{n+2}$, ce qui prouve en définitive que les tangentes au nœud, au nombre de $n+2$, font entre elles des angles égaux, qu'elles sont, si l'on veut, les rayons d'un polygone régulier, *c. q. f. d.*

11.

Comme application, considérons la fonction entière

$$(z - a_1)(z - a_2) \ldots\ldots (z - a_n).$$

Les courbes d'égal module de cette fonction ont pour équation:

$$\mathrm{Mod.}\,(z - a_1)(z - a_2) \ldots . (z - a_n) = k,$$

k désignant un nombre positif. Si nous marquons les points $a_1\ a_2\ \ldots .\ a_n$ cette équation pourra s'écrire

$$\widehat{za_1}\ .\ \widehat{za_2}\ .\ \widehat{za_3} \ldots \widehat{za_n} = k.$$

Ainsi les courbes d'égal module des fonctions entières sont les lieux des points pour lesquels le produit de leurs distances à des points fixes est constant.

On voit ainsi que la lemniscate est la courbe d'égal module des fonctions du second degré.

On voit, d'après ce qui précède, que dans la lemniscate à nœud, les branches doivent se couper orthogonalement.

Considérons enfin la fonction e^z, k désignant une constante, l'équation des courbes d'égal module sera :

$$e^x = k\,;$$

celle des coupes d'égal argument, k' désignant une autre constante :

$$y = k'.$$

Ainsi, dans ce cas, les courbes d'égal module et d'égal argument sont des droites parallèles aux axes, l'équation de la surface de e^z sera :

$$u = e^x$$

c'est un cylindre logarithmique ; l'équation de la seconde surface de e^z sera :

$$v = x$$

elle est plane.

Les racines de la dérivée de e^z égalée à 0 coïncident avec les racines de la fonction elle-même égalée à 0 ; aussi ne faut-il pas s'étonner de voir les courbes d'égal argument toujours parallèles.

12.

Des discussions précédentes, on peut déduire ce théorème analogue à celui de Rolle, et qui en est, pour ainsi dire, la généralisation.

Un point ne peut passer d'un zéro de f(z) *à un autre zéro, en se mouvant dans le plan, sans rencontrer en chemin une courbe d'égal module, le long de laquelle* f′(z) *passe par zéro.*

13.

L'emploi du calcul des résidus conduit à la connaissance de quelques propriétés remarquables des courbes d'égal module.

Considérons d'abord le résidu :

$$\mathcal{E}\left(\!\left(\frac{f'(z)}{f(z)}\right)\!\right)$$

relatif à un contour fermé quelconque; ce résidu est évidemment égal à la différence des nombres de zéros et d'infinis de la fonction $f(z)$ à l'intérieur du contour en question, soit m ce nombre, nous aurons :

$$\mathcal{E} \left(\!\left(\frac{f'(z)}{f(z)} \right)\!\right) = m$$

ou bien, multipliant par $2\pi - 1$:

$$\int \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = 2\pi\, m \sqrt{-1}$$

ou :

$$\int \frac{d.\,lf(z)}{dz}\, dz = 2\pi\, m \sqrt{-1}$$

d'où l'on tire :

$$\left[\, lf(z) \right]_z^z = 2\pi\, m \sqrt{-1}$$

les limites z, z indiquant que l'on doit prendre la différence des valeurs de $lf(z)$ au point z, après avoir fait circuler une fois z le long du contour en question, on obtient ainsi :

$$l\left(u + \omega \sqrt{-1}\right)_z^z = 2m\,\pi \sqrt{-1}$$

ou :

$$\omega_1 - \omega_2 = 2m\pi$$

ω_1 et ω_2 étant les valeurs de l'argument de $f(z)$, lorsque z partant d'un point du contour donné, a parcouru une fois ce contour, nous pouvons ainsi énoncer le théorème suivant :

Le nombre des zéros de f(z) *diminué du nombre de ses infinis compris dans l'intérieur d'un contour donné, est égal à la quantité dont varie l'argument de* f(z), *quand le point* z *se meut sur ce contour de manière à en faire un tour complet, le sens de la rotation étant celui dans lequel on compte les angles en coordonnées polaires.*

Cauchy a, le premier, énoncé ce théorème sous une forme un peu différente, et que l'on retrouve dans les traités d'algèbre.

Soit $f(z) = X + Y\sqrt{-1}$ *une fonction entière de* $z = x + y\sqrt{-1}$, (A) *un contour,* m *le nombre de racines de* $f(z) = 0$ *comprises à l'intérieur de ce contour, soit* i *le nombre de fois que le rapport* $\frac{Y}{X}$ *passe du positif au négatif en s'annulant,* i' *le nombre de fois qu'il passe du négatif au positif en s'annulant; lorsque le point dont les coordonnées sont* x *et* y, *décrit le contour* A, *soit* Δ *la différence entre* i' *et* i, *on aura :*

$$m = \frac{\Delta}{2}.$$

14.

Sans nous arrêter plus longtemps au théorème de Cauchy, considérons les courbes d'égal module, décrites autour d'un zéro de $f(z)$, ne contenant que ce seul zéro et pas d'infini de $f(z)$ dans leur intérieur ; si nous considérons alors les courbes d'égal argument, nous voyons qu'elles rencontrent toutes une fois les courbes d'égal module considérées.

En effet, les courbes d'égal argument rencontreront toutes au moins une fois, en vertu de la continuité de l'argument ω variant de 2π le long de la courbe d'égal module, cette courbe d'égal module.

En second lieu, je dis qu'une courbe d'égal argument ne pourra rencontrer une des courbes d'égal module dont il est question en deux points; en effet, s'il y a deux points de rencontre, il y en aura au moins trois, car les courbes d'égal argument ont un point d'arrêt au point racine; considérons alors la branche de courbe d'égal argument qui coupe la courbe d'égal module en deux points, et décrivons une série de courbes d'égal module correspondant à des modules moindres de $f(z)$ que la première. L'une de ces courbes finirait par devenir tangente à la courbe d'égal argument, ce qui est absurde.

15.

Un raisonnement tout à fait semblable au précédent, montrerait qu'une courbe d'égal module renfermant deux zéros de $f(z)$ est rencontrée deux fois par chaque courbe d'égal argument, etc.....

Ce qui vient d'être dit des zéros, peut évidemment se répéter pour les infinis, mais pas pour les deux à la fois.

16.

Considérons maintenant la formule

$$\mathcal{E} \left(\!\left(\frac{f'(z)}{f(z)} \right)\!\right) z = \Sigma\alpha - \Sigma\beta \quad (*)$$

(*) On peut observer en passant, que cette formule donne la démonstration très-simple d'un théorème démontré assez longuement par Cauchy, dans ses nouveaux exercices d'analyse et de physique mathéma-

dans laquelle le résidu est pris pour l'intérieur d'un contour contenant les zéros α de $f(z)$ et ses infinis β; si nous supposons que zéro soit une racine de l'équation $f(z)=0$, ce qui aura toujours lieu à l'aide d'un changement de coordonnées, la formule précédente devient :

$$\mathcal{E} \left(\!\left(\frac{f'(z)}{f(z)} \right)\!\right) z = 0.$$

Le résidu étant pris le long d'une courbe d'égal module ne contenant pas d'autre zéro de $f(z)$ que l'origine et point d'infini de cette fonction. Cette équation peut encore s'écrire :

$$\int z \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = 0 \qquad (1);$$

or, nous avons :

$$f'(z) = \frac{e^{\omega\sqrt{-1}}\left\{ \frac{du}{dx}\, dx + \frac{du}{dy}\, dy \right\} + e^{\omega\sqrt{-1}}\sqrt{-1}\, u \left\{ \frac{d\omega}{dx}\, dx + \frac{d\omega}{dy}\, dy \right\}}{dx + dy\sqrt{-1}}$$

et en vertu des équations (A) § 7,

$$f'(z) = \left(\frac{du}{dx} - \frac{du}{dy}\sqrt{-1}\right) u e^{\omega\sqrt{-1}}.$$

Par conséquent :

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \left(\frac{du}{dx} - \frac{du}{dy}\sqrt{-1}\right)\frac{1}{u} \ldots\ldots\ldots \quad (G),$$

l'équation (1) peut alors s'écrire ainsi :

$$\int \frac{z\,dz}{u}\left\{ \frac{du}{dx} - \frac{du}{dy}\sqrt{-1} \right\} = 0,$$

ou ce qui revient au même :

$$\int \frac{1}{u}(x + y\sqrt{-1})\, ds\, (\text{Cos.}\, \alpha + \sqrt{-1}\, \text{Sin.}\, \alpha) \left(\frac{du}{dx} - \sqrt{-1}\, \frac{du}{dy}\right) = 0;$$

---

tique, et employé par M. Puiseux dans son mémoire sur les fonctions algébriques, à savoir, que les racines de l'équation :

$$f(z, t) = 0 \qquad (a)$$

dans laquelle f est une fonction synectique, sont des fonctions continues du paramètre t. Une racine quelconque de l'équation (a) peut en effet se mettre sous la forme :

$$\mathcal{E} \left(\!\left(\frac{f'(z,t)}{f(z,t)} \right)\!\right) z = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{f'(z,t)}{f(z,t)}\, z\,dz,$$

et la quantité sous le signe $\int$ ne devenant pas infinie, l'intégrale qui est racine de l'équation (a) reste fonction continue de t.

ds désignant l'élément d'arc de courbe d'égal module, et α l'angle de cet élément avec l'axe des x, en remplaçant Cos. α et Sin. α par leurs valeurs, il vient :

$$\int (x+y\sqrt{-1})\frac{ds}{u}\left\{\frac{\frac{du}{dx}+\sqrt{-1}\,\frac{du}{dy}}{\sqrt{\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\left(\frac{du}{dy}\right)^2}}\right\}\left(\frac{du}{dx}-\sqrt{-1}\,\frac{du}{dy}\right)=0,$$

ou bien :

$$\int (x+y\sqrt{-1})\frac{ds}{u}\sqrt{\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\left(\frac{du}{dy}\right)^2}=0$$

Cette équation se décompose en deux autres :

$$\int \frac{x\,ds}{u}\sqrt{\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\left(\frac{du}{dy}\right)^2}=0$$

$$\int \frac{y\,ds}{u}\sqrt{\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\left(\frac{du}{dy}\right)^2}=0.$$

Ces équations prouvent que si : *sur chaque élément d'une courbe d'égal module, partagée en éléments égaux et ne renfermant qu'un zéro de* f(z), *on porte des poids égaux au module* $\frac{1}{u}\sqrt{\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\left(\frac{du}{dy}\right)^2}$ de $\frac{f'(z)}{f(z)}$, *le centre de gravité de ces poids sera précisément le zéro en question.*

17.

Nous venons de voir tout à l'heure que la dérivée de $f(z)$ pouvait être mise sous la forme [§ 16, *éq.* (C.)] :

$$\mu e^{\omega\sqrt{-1}}\left(\frac{du}{dx}-\frac{du}{dy}\sqrt{-1}\right)$$

son module est :

$$\mu\sqrt{\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\left(\frac{du}{dy}\right)^2}$$

Ce module passe par zéro quand ~~u passe par zéro, ou quand~~ $\sqrt{\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\left(\frac{du}{dy}\right)^2}$ passe lui-même par zéro; ce qui exige, ~~comme nous avons vu~~, que $f'(z)$ passe par zéro. Mais, en général, quand u passe par zéro, Mod. $f(z)$ ne passe pas par zéro; et pour qu'il en fût ainsi, il faudrait que $f(z)$ eût, au point correspondant, une racine double, donc $\sqrt{\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\left(\frac{du}{dy}\right)^2}$ est infini aux points correspondants

aux zéros simples de $f(z)$; mais $\left[\sqrt{1+\left(\frac{du}{dy}\right)^2+\left(\frac{du}{dy}\right)^2}\right]^{-1}$ est le cosinus de l'angle que le plan tangent à la surface de $f(z)$ fait avec le plan des xy, donc $\sqrt{\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\left(\frac{du}{dy}\right)^2}$ est la tangente du même angle; donc enfin aux points correspondants aux zéros, le plan tangent ~~est perpendiculaire~~ n'est pas parallèle au plan des xy. S'il s'agissait de zéros doubles, le plan tangent serait au contraire ~~parallèle~~ au plan des xy.

Ainsi, on peut maintenant se faire une idée assez nette de la forme des surfaces qui représentent $f(z)$; la première se compose d'une série de trompes pointues, reposant par ces pointes sur les zéros de $f(z)$. Quelques-unes de ces pointes sont émoussées et reposent sur les zéros doubles; enfin, ces trompes se raccordent et les points de raccordement correspondent aux zéros de $f'(z)$. La seconde surface se compose aussi d'une série de trompes, seulement elles sont infinies et asymptotiques à des droites perpendiculaires au plan des xy; dans les deux surfaces, il y aura des trompes ascendantes asymptotiques à des droites parallèles aux u passant par les infinis de $f(z)$.

La seconde surface est à courbures opposées; on peut le vérifier sur l'équation qui fait connaitre les rayons de courbure. Cette équation, comme on sait, est:

$$\frac{1}{R^2}(1+p^2+q^2)+\frac{1}{R}[2pqs-(1+p^2)r-(1+q^2)t]+rt-s^2=0,$$

R, p, q, r, s, t ayant la signification qu'on leur attribue dans tous les traités d'analyse. Si l'on y introduit l'hypothèse

$$\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{dv}{dy^2}=0$$

ou

$$r=-t,$$

le terme de $rt-s^2$ sera de signe contraire au coëfficient de $\frac{1}{R^2}$ et les deux courbures seront de sens contraire, *c. q. f. d.*

18.

Des discussions précédentes résulte, que nous venons de trouver une intégrale très-générale de l'équation

$$\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2v}{dy^2}=0 \qquad (B)$$

puisque nous venons de voir que tout logarithme de module de fonction monogène y satisfait. Réciproquement nous allons démontrer que :

*Toute fonction continue de deux variables, n'ayant qu'une valeur pour un même système de valeurs d'*x *et d'*y, *et satisfaisant à l'équation* (B), *peut être pris pour logarithme du module d'une fonction monodrome et monogène.*

En effet, dans l'équation (B) remplaçons v par lu, il viendra :

$$\frac{1}{u}\left[\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\left(\frac{du}{dy}\right)^2\right]=\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2} \quad (1);$$

posons actuellement :

$$(2) \qquad \omega=\int\frac{1}{u}\frac{du}{du}\,dy+\text{fonct. arbitraire d'}x,$$

ou ce qui revient au même:

$$\frac{d\omega}{dy}=\frac{1}{u}\frac{du}{dx},$$

ou différentiant :

$$\frac{d^2\omega}{dx\,dy}=\frac{1}{u}\frac{d^2u}{dx^2}-\frac{1}{u^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2$$

portant cette valeur de $\frac{1}{u}\frac{d^2u}{dx^2}-\frac{1}{u^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2$ dans l'équation (1), elle devient :

$$\frac{d^2\omega}{dx\,dy}=\frac{1}{u^2}\left(\frac{du}{dy}\right)^2-\frac{1}{u}\frac{d^2u}{dy^2},$$

d'où, intégrant :

$$\frac{d\omega}{dx}=-\frac{1}{u}\frac{du}{dy}+\psi(x) \qquad (3)$$

ψ étant une fonction d'x arbitraire, prenons $\psi(x)=0$, et nous voyons que étant donnée l'équation (1), on pourra toujours choisir une fonction ω satisfaisant aux relations (A):

$$(A)\ \begin{cases}\dfrac{d\omega}{dy}=\dfrac{1}{u}\dfrac{du}{dx}\\[2mm]\dfrac{d\omega}{dx}=-\dfrac{1}{u}\dfrac{du}{dy}\end{cases}$$

or, ce sont les équations qui expriment que $ue^{\omega\sqrt{-1}}$ est une fonction monogène dont u est le module ; or, si pour une même valeur d'x et d'y, u n'a jamais qu'une seule valeur, $v=lu$ n'en aura qu'une seule aussi, et ω défini par les équations (A) pourra en avoir plusieurs différant par une constante ; mais puisque l'on est maître de choisir ces constantes, on pourra les choisir toutes nulles ou différant de multiples

de 2π, en sorte que $ue^{\omega\sqrt{-1}}$ restera monodrome. Il faut remarquer que pour $u=0$ les équations (A) donnent pour $\frac{d\omega}{dx}$ et $\frac{d\omega}{dy}$ des valeurs indéterminées, et effectivement aux zéros de la fonction on sait que ω est indéterminé.

19.

Ceci posé, l'équation qui exprime qu'un corps est en équilibre de température, est :

$$\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2v}{dy^2}+\frac{d^2v}{dz^2}=0.$$

Si l'on suppose que le corps soit une plaque indéfinie assez mince pour que $\frac{dv}{dz}$ soit nul, c'est-à-dire pour que l'on n'ait pas besoin de considérer les variations de température dans le sens transversal, l'équation précédente se réduit à :

$$\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2v}{dy^2}=0.$$

Or, v varie d'une manière continue, c'est la température de la plaque ; pour la même raison il n'a qu'une valeur pour une même valeur d'x et d'y, donc v est le logarithme du module d'une fonction monodrome et monogène. Supposons donc que l'on trace effectivement sur la plaque en question deux axes $0x$ et $0y$ par rapport auxquels on rapportera les valeurs de la variable dont la fonction a pour module $u=e^v$; construisons la seconde surface de cette fonction, les projections des sections parallèles à la plaque seront à la fois les courbes d'égal module et d'égale température.

De là, un moyen de trouver les courbes isothermes sur une plaque échauffée ou refroidie d'une manière très-intense en quelques-uns de ses points que l'on assimilera aux zéros ou aux infinis d'une fonction dont les courbes d'égal module seront précisément ces courbes isothermes. De là aussi, un moyen de trouver les trajectoires orthogonales des courbes isothermes, c'est ce que nous allons éclaircir par quelques exemples.

20.

Si l'on considère une seule source de chaleur, les courbes isothermes seront des cercles, cela est évident. Prenons deux sources, nous aurons les courbes d'égal

module d'une fonction qui devient infinie deux fois sans passer par zéro puisque le logarithme v de son module devient deux fois infini positif. Cette fonction est donc nécessairement de la forme suivante, A, a, b désignant des constantes :

$$\frac{A}{(z-a)(z-b)}$$

ses courbes d'égal module ont pour équation :

$$\text{Mod.}\ \frac{A}{(z-a)(z-b)} = \text{constante},$$

c'est-à-dire :

$$\text{Mod.}\ (z-a)(z-b) = \text{constante},$$

ou

$$r\,r' = \text{constante}.$$

r et r' étant les rayons vecteurs d'un point par rapport aux infinis a, b, c'est-à-dire par rapport aux sources calorifiques.

Ainsi dans le cas de deux sources calorifiques, les courbes isothermes sont des lemniscates ayant leurs foyers aux deux sources.

21.

Les trajectoires orthogonales de ces lemniscates peuvent être trouvées facilement au moyen des théories précédentes ; elles ont pour équation

$$\text{Arg.}\ (z-a)(z-b) = \text{const.} = \chi$$

ou bien

$$\alpha + \beta = \chi$$

α et β désignant les angles formés par les rayons vecteurs r et r' de la courbe cherchée par rapport aux deux sources, et l'axe des x. En prenant pour axe des x la ligne des sources, pour axe des y une perpendiculaire au milieu, on trouve pour équation des trajectoires en question :

$$\operatorname{tg}\chi = \frac{\dfrac{y}{c-x} - \dfrac{y}{c+x}}{1 + \dfrac{y^2}{c^2-x^2}}$$

c désignant la demi-distance des sources, ou bien :

$$\operatorname{tg}\chi\,(y^2-x^2) - 2\,xy + \operatorname{tg}\chi\,c^2 = 0.$$

Cette équation représente des hyperboles équilatères ayant leur centre commun au milieu de la droite qui joint les deux sources.

22.

Avec trois, quatre.... sources de chaleur, on trouverait des courbes ayant pour équation en coordonnées multipolaires :

$$r\,r'\,r''\ldots. = \text{constante}.$$

Ces courbes seront toutes algébriques. Ainsi on peut dire que les courbes isothermes obtenues à l'aide de fils incandescents, traversant une plaque homogène, sont algébriques et de degré double du nombre de sources calorifiques.

23.

Il peut être intéressant de chercher ce que deviendraient les courbes isothermes dans le cas où l'on aurait non-seulement des sources calorifiques, mais encore des sources frigorifiques excessivement intenses.

Supposons, par exemple, une source de froid et une de chaud, la quantité v passe par $+\infty$ et par $-\infty$, une fois. La fonction qui fournira les courbes isothermes sera donc de la forme :

$$A\,\frac{z-a}{z-b} = \text{constante}.$$

A, a, b étant des constantes, les courbes isothermes seront définies par l'équation :

$$\frac{\text{Mod. } (z-a)}{\text{Mod. } (z-b)} = \text{const.} = k$$

ou en coordonnées bipolaires :

$$r : r' = k.$$

Cette équation, comme on sait, représente des cercles, on trouverait pour équation des trajectoires orthogonales en coordonnées angulaires

$$\alpha - \beta = \text{const}.$$

Cette équation représente encore un système de cercles passant par les deux sources.

Plus généralement l'équation des courbes isothermes en coordonnées multipolaires est :

$$\frac{r\,r'\,r''\ldots.}{r_1\,r_1'\,r_1''\ldots.} = \text{constante},$$

$r\,r'\ldots.$ étant les rayons vecteurs appartenant aux sources calorifiques.
$r_1\,r_1'\ldots.$ étant les rayons vecteurs appartenant aux sources frigorifiques.

SECONDE PARTIE.

Cauchy a démontré que lorsqu'une série ordonnée par rapport aux puissances croissantes d'une même variable était convergente pour une certaine valeur de sa variable :

1° Elle était convergente pour toute valeur de cette variable ayant un module moindre ;

2° Elle était donc convergente pour toutes les valeurs d'x comprises à l'intérieur d'un cercle d'un certain rayon décrit de l'origine comme centre ; ce cercle a été appelé par Cauchy *cercle de convergence ;*

3° Elle représentait à l'intérieur du cercle de convergence une fonction synectique de la variable ordonnatrice ;

4° Enfin, on pouvait différentier ou intégrer la fonction représentée par cette série en différentiant ou en intégrant chacun de ses termes, pour toute valeur de la variable intérieure au cercle de convergence.

Le but que nous nous proposons dans cette partie de notre thèse est de généraliser le Théorème de Cauchy, en l'étendant au cas où les différents termes de la série sont, non plus des puissances entières de la variable multipliées par des constantes, mais bien des fonctions synectiques quelconques.

1°

Commençons par rappeler un théorème déjà connu en donnant à la démonstration et à l'énoncé un peu plus de précision, qu'on n'a l'habitude de le faire.

Si $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$, $\varphi_3(z)$.... représentent des fonctions finies et continues le long d'un contour de longueur finie $z_0 z_1$, si de plus la série

$$f(z) = \varphi_1(z) + \varphi_2(z) + \cdots\cdots \varphi_n(z) \qquad (1)$$

reste convergente et représente une fonction continue de z sur le même contour, on aura :

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz = \int_{z_0}^{z_1} \varphi_1(z)\,dz + \int_{z_0}^{z_2} \varphi_2(z)\,dz + \&\ldots.. \qquad (2)$$

les intégrales étant supposées prises le long du contour en question.

En effet, soit R, le reste de la série (1), on a :

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\, dz = \sum_{n=1}^{n=m} \int_{z_0}^{z_1} \varphi_n(z)\, dz + \int_{z_0}^{z_1} R\, dz \qquad (3)$$

soit μ le module maximum de R le long du contour d'intégration, nous aurons, en prenant le module de dz constant et égal à $d\sigma$,

$$Mod \int_{z_0}^{z_1} R\, dz < \mu \int_{z_0}^{z_1} d\sigma$$

$$\text{ou} < \mu\sigma.$$

σ désignant dans cette formule l'arc de contour $z_0\, z_1$, or σ est fini par hypothèse, μ a pour limite o quand m augmente indéfiniment, donc $\mu\sigma$ et par suite $\int_{z_0}^{z_1} R\, dz$ tend vers o pour $m = \infty$, en passant alors aux limites l'Équation (3) fournit l'Équation (2). *c. q. f. d.*

Il ne faut pas perdre de vue que le chemin $z_0\, z_1$ doit avoir une longueur finie, et que les fonctions $f(z)$, $\varphi_1(z) \cdots$ doivent rester finies le long de $z_0\, z_1$, sans quoi le Théorème pourrait tomber en défaut.

2°

Le point x *étant supposé contenu à l'intérieur d'une aire* (A), *si les fonctions* $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x) \cdots$ *restent synectiques, si de plus la série*

$$f(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) \cdots\cdots \qquad (1)$$

reste convergente et la fonction f (x) *synectique on aura :*

$$f'(x) = \varphi'_1(x) + \varphi'_2(x) + \cdots \qquad (2)$$

En effet, multiplions les deux membres de l'équation (1) par $\dfrac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\ \dfrac{1}{(z-x)^2}$ après y avoir changé x en z, et intégrons le long d'un contour intérieur à (A) et enveloppant le point x, nous aurons en vertu du Théorème précédent :

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int f(z) \frac{dz}{(z-x)^2} =$$

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{\varphi_1(z)\, dz}{(z-x)^2} + \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{\varphi_2\, z\, dz}{(z-x)^2} + \cdots$$

Or, si l'on remarque que, en général :

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int \frac{\varphi(z)\,dz}{(z-x)^2} = \mathcal{E}\,\frac{\varphi(z)}{((z-x))^2} = \varphi'(x)$$

l'Équation précédente fournit précisément l'Équation (2).

Nous avons, dans la démonstration précédente, supposé le point x intérieur au contour (A), afin de pouvoir décrire autour du point en question un contour le long duquel les fonctions f et φ_1, $\varphi_2 \cdots$ restent synectiques ; aussi ne faut-il point s'étonner si l'on voit le Théorème tomber en défaut lorsque x se trouve sur le contour (A) lui-même.

3°

Supposons la série

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \cdots \varphi_n(x) + \cdots \qquad (1)$$

*convergente pour toutes les valeurs d'*x *comprises dans l'aire* (A), *et les fonctions* φ_1, $\varphi_2 \cdots$ *synectiques à l'intérieur de la même aire. Si en décrivant dans cette aire un petit cercle de rayon fixe, si petit que l'on voudra du reste, autour du point x comme centre, les modules maximum* μ_1, $\mu_2 \cdots$ *de* φ_1, $\varphi_2 \cdots$ *à l'intérieur de ce cercle forment une série convergente, la série* (1) *représentera une fonction synectique à l'intérieur de l'aire* (A).

En effet, soit $f(x)$ la valeur de la série (1), h un accroissement infiniment petit donné à x, on aura :

$$f(x+h) - f(x) = \Sigma \left\{ \varphi(x+h) - \varphi(x) \right\}$$

n étant bien entendu supposé assez voisin de o pour que le point $x + h$ soit intérieur à l'aire (A). L'Équation précédente peut s'écrire ainsi qu'il suit en observant que les fonctions φ_1, $\varphi_2 \cdots$ sont synectiques :

$$f(x+h) - f(x) = \Sigma \left\{ \mathcal{E}\frac{\varphi(z)}{((z-x-h))} - \mathcal{E}\,\frac{\varphi(z)}{((z-x))} \right\}$$

ou bien :

$$f(x+h) - f(x) = h\,\Sigma\,\mathcal{E}\,\frac{\varphi(z)}{(((z-x-h)(z-x)))} \cdots\cdots (2)$$

Avec un rayon suffisamment petit et du point x comme centre, décrivons un cercle, prenons h assez voisin de o pour que $x + h$ soit contenu dans ce cercle ; nous pourrons dans l'Équation (2) remplacer le signe $\mathcal{E}$ par une intégrale prise le long de ce cercle et l'on aura en appelant r son rayon :

$$f(x+h) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\,h\,\Sigma\int_0^{2\pi} \frac{\varphi\left(re^{\theta\sqrt{-1}} + x\right)}{re^{\theta\sqrt{-1}} - h}\,d\theta \ldots. \qquad (3)$$

Soit actuellement δ la plus courte distance du point $x + h$ à la circonférence le long de laquelle on intègre, μ le module maximum de $\varphi(z)$. Sur cette circonférence, nous aurons :

$$Mod. \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(x + re^{\theta\sqrt{-1}})\, d\theta}{re^{\theta\sqrt{-1}} - h} < \frac{\mu}{\delta} \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$\text{ou} \qquad < 2\pi \frac{\mu}{\delta}$$

L'Équation (3) donne alors :

$$Mod. \left\{ f(x + h) - f(x) \right\} < Mod. \frac{h}{\delta} \Sigma \mu,$$

(car, en vertu de notre hypothèse, $\Sigma \mu$ est une série convergente). Or, $\Sigma \mu$ est fixe, δ ne peut que croître quand h tend vers o, donc le module de $f(x + h) - f(x)$ a pour limite o. Donc, enfin, $f(x)$ est une fonction continue de x. *c. q. f. d.*

En second lieu, il est bien clair que la fonction $f(x)$ ne peut avoir qu'une seule valeur pour une même valeur d'x, donc elle est monodrome, et en vertu de la convergence de la série (1) finie, reste à faire voir qu'elle est monogène.

A cet effet, divisons les deux membres de l'Équation (2) par h et développons le second membre ; il vient :

$$(4) \quad \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \Sigma \left[\mathcal{E} \frac{\varphi(z)}{((z - x))^2} + h\, \mathcal{E} \frac{\varphi(z)}{((z - x))^2 ((z - x - h))} \right]$$

Mais la série dont le terme général est $\mathcal{E} \frac{\varphi(z)}{((z - x))^2}$ est convergente ; en effet, on a

$$\mathcal{E} \frac{\varphi(z)}{((z - x))^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(x + re^{\theta\sqrt{-1}})}{re^{\theta\sqrt{-1}}}\, d\theta$$

D'où l'on voit que :

$$Mod. \mathcal{E} \frac{\varphi(z)}{((z - x))^2} < \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\mu}{r}\, d\theta$$

$$\text{ou} < \frac{\mu}{r}$$

Or, la série dont le terme général est $\frac{\mu}{r}^n$ est convergente ; cette série étant à termes positifs, la série dont le terme général est $\mathcal{E} \frac{\varphi_n(z)}{((z - x))^2}$



l'est aussi ; enfin, répétant le même raisonnement sur la série dont le terme général est :

$$\mathcal{E}\frac{\varphi_n(z)}{((z-x))^2\,((z-x-h))}$$

on verrait que les modules de ses termes sont moindres respectivement que $\frac{\mu_1}{r\delta}, \frac{\mu_2}{r\delta} \dots \frac{\mu_n}{r\delta} \dots$, que par conséquent cette série est convergente, et que le module de sa valeur est moindre que

$$(\mu_1 + \mu_2 + \cdots \mu_n + \cdots)\ \frac{1}{r\delta}$$

Or, quand h tend vers o, cette quantité ne croît pas indéfiniment puisque le seul facteur variable δ tend vers r. On peut donc écrire :

$$\Sigma\ \mathcal{E}\frac{\varphi(z)}{(((z-x)^2\,(z-x-h)))} = \lambda$$

λ étant une quantité dont le module reste inférieur à une quantité finie quand h tend vers o. L'Équation (4) peut alors se mettre sous la forme :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \Sigma\ \mathcal{E}\frac{\varphi(z)}{((z-x))^2} + \lambda h$$

c'est-à-dire, faisant converger h vers o :

$$Lim\ \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \Sigma\,\varphi'(x)$$

Cette équation ayant lieu de quelque manière que h tende vers o, on en conclut que $f(x)$ est une fonction monogène et par suite synectique dans l'aire (A). *c. q. f. d.*

4°

Supposons que x *variant à l'intérieur du contour* (A), *la série :*

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \cdots \varphi_n(x) + \cdots \qquad (1)$$

soit convergente et que les différents termes soient des fonctions synectiques, la série

$$\frac{\varphi_1(x)\ Sin^2\,2\pi\,(t-1)}{\{\,2\pi\,(t-1)\,\}^2} + \frac{\varphi_2(x)\ Sin^2\,2\pi\,(t-2)}{\{\,2\pi\,(t-2)\,\}^2} + \&\dots \qquad (2)$$

sera convergente pour toutes les valeurs de t*; de plus, les modules maximums de ses différents termes, quand* x *et* t *varieront à l'intérieur de cercles suffisamment petits, sera elle-même convergente.*

En effet, la série

$$\frac{1}{(t-1)^2} + \frac{1}{(t-2)^2} + \frac{1}{(t-3)^2} + \cdots \frac{1}{(t-n)^2} + \cdots \qquad (3)$$

est convergente pour toutes les valeurs de t différentes de $1, 2, 3 \cdots n \cdots$ Pour le prouver, supposons le module de t compris entre n et $n+1$ et traçons un petit cercle à l'intérieur duquel t reste compris, mais ne contenant pas l'un des points $1, 2, 3 \cdots n \cdots$ Soit ρ le module maximum de t dans ce cercle, p un entier quelconque, on aura en valeur absolue :

$$Mod.\ (t-p) \geqq \rho - p$$

Les modules des termes de la série (3) sont donc respectivement inférieurs aux termes de la série

$$\frac{1}{(\rho-1)^2} + \frac{1}{(\rho-2)^2} + \cdots \frac{1}{(\rho-n)^2} + \cdots \qquad (4)$$

Or, cette série est convergente comme ayant ses termes respectivement inférieurs à ceux de la série :

$$\frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{(n-2)^2} + \cdots$$

que l'on sait être convergente, donc, la série (3) est convergente, et de plus on voit que la série des modules maximum de ses différents termes, lorsque t varie à l'intérieur d'un cercle ne contenant pas les points $1, 2 \cdots n \cdots$, reste toujours convergente. (Cette série est la série (4) du moins aux premiers termes près).

Cela posé, multiplions par $\frac{Mod.\ Sin^2 2\pi t}{(2\pi)^2}$, la série des modules maximum des termes de la série (3); on obtiendra une nouvelle série que nous appellerons (S) et qui sera convergente; enfin $\mu_1, \mu_2 \cdots$ désignant les modules maximum de $\varphi_1, \varphi_2 \cdots \varphi_n \cdots$ à l'intérieur de l'aire (A), ces nombres ne croissant pas indéfiniment si on les multiplie respectivement par chacun des termes de la série (S), on obtiendra une nouvelle série convergente. Or, cette nouvelle série a ses termes respectivement plus grands, non-seulement que les modules des termes de la série (2), mais encore que les modules maximum des termes de la même série, quand x et t varient, le premier, dans l'aire (A), le second, dans un cercle ne contenant pas les points $1, 2, 3 \cdots n \cdots$: ce qui démontre le théorème énoncé.

5°

Il résulte de là que la série (2) du § précédent représente une fonction synectique de t dans toute l'étendue du plan, excepté pour les points $1, 2, 3 \cdots n \cdots$ et de x à l'intérieur de l'aire (A).

Nous allons voir que les points 1, 2, 3 ⋯ n ⋯ eux-mêmes ne sont pas des points exceptionnels pour la variable t. En effet, considérons cette variable dans le voisinage du point n et faisons abstraction dans la série (2) du terme contenant $\varphi_n(x)$; tout ce qui vient d'être dit pour la série (2) sera applicable à cette nouvelle série dans le voisinage du point n; elle représentera donc une fonction synectique de t en ce point. Si maintenant on vient à lui ajouter le terme

$$\varphi_n(x)\,\frac{\operatorname{Sin.}^2 2\pi(t-n)}{\{2\pi(t-n)\}^2}$$

qui est une fonction synectique de t au point n, la somme, c'est-à-dire la série (2) elle-même sera encore une fonction synectique de t. *c. q. f. d.*

6°

Supposons que x *variant à l'intérieur de l'aire* (A), $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ ⋯ *restent synectiques, et la série*

$$f(x)=\varphi_1(x)+\varphi_2(x)+\cdots \qquad (1)$$

convergente, sa somme f (x) *représentera une fonction synectique d'*x.

En effet, considérons la fonction définie par la série dont le terme général est :

$$\frac{\varphi_n(x)\operatorname{Sin.}^2 2\pi(t-n)}{\{2\pi(t-n)\}^2}$$

Cette série, dont nous désignerons la valeur par $\psi(x,t)$, représente, en vertu du théorème démontré au § précédent, une fonction synectique d'x et de t, et cette fonction pour $t=1, 2, 3 \cdots n \cdots$ se réduit à $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \cdots \varphi_n(x) \cdots$ L'Équation (1) peut alors s'écrire :

$$f(x)=\psi(x,1)+\psi(x,2)+\cdots\psi(x,n)+\cdots$$

ou ce qui revient au même :

$$f(x)=\mathcal{E}\,\frac{\psi(x,t)\cdot 2\pi\sqrt{-1}}{\left(\left(e^{2\pi t\sqrt{-1}}-1\right)\right)}$$

Ce résidu, pris le long d'un contour qui enveloppe l'axe des x positifs, équivaut à la somme des trois intégrales

$$-\int_{\eta_0}^{\eta^1}\varpi\left(\xi_0+\eta\sqrt{-1}\right)d\eta\sqrt{-1}+\int_{\xi_0}^{\infty}\varpi\left(\xi+\eta_0\sqrt{-1}\right)d\xi-\int_{\xi_0}^{\infty}\varpi\left(\xi+\eta_1\sqrt{-1}\right)d\xi \qquad (2)$$

ξ_0 désignant un nombre compris entre 0 et 1, $\varkappa_0$, $\varkappa_1$ des nombres finis et ϖ la fonction qui entre sous le signe résidu, dans la formule précédente.

Or, ces trois intégrales sont des fonctions synectiques d'x; en effet, les quantités qui entrent sous le signe intégral sont des fonctions synectiques d'x, d'après ce que nous avons vu, leurs dérivées secondes sont donc également synectiques, et, par suite, on pourra appliquer aux intégrales en questions les règles de la différentiation sous le signe *somme.* De là résulte que ces intégrales sont monogènes et continues; elles sont évidemment monodromes, puisque, pour une même valeur d'x, elles ne peuvent avoir qu'une seule valeur; enfin, elles sont finies, puisque la quantité sous le signe intégral ne devient jamais infinie; donc, enfin, elles sont synectiques, et par suite la fonction $f(x)$, qui est leur somme, l'est aussi.

7°

En résumé, *si* x *variant à l'intérieur d'un contour* (A), *les fonctions* φ_1 (x), φ_2 (x) $\cdots$ φ_n (x) *restent synectiques et la série*

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \cdots \varphi_n(x) + \cdots \qquad (1)$$

convergente :

1° *La série* (1) *aura pour valeur une fonction synectique à l'intérieur du contour* (A);

2° *La différentielle et l'intégrale de cette fonction pour tous les points de l'aire* (A) *s'obtiendra en différentiant ou en intégrant chaque terme de la série* (1), *pourvu que le contour d'intégration soit fini.*

Dans les applications de ce théorème il faut avoir le plus grand soin de tenir compte de toutes les conditions de son énoncé sous peine de le voir tomber en défaut.

Considérons par exemple la série :

$$\mathit{Sin}\ x - \frac{\mathit{Sin}\ 2\,x}{2} + \frac{\mathit{Sin}\ 3\,x}{3} - \cdots\cdots$$

voilà une série convergente : lorsque x varie le long de l'axe des x, ses termes sont des fonctions synectiques d'x dans toute l'étendue du plan, et cependant elle représente, comme on sait, une fonction discontinue; de plus, si on la différentie, on trouve une série divergente :

$$\mathit{Cos}\ x - \mathit{Cos}\ 2x + \mathit{Cos}\ 3x - \cdots\cdots$$

Il semble que notre théorème tombe en défaut; cependant, si nous regardons de près, nous verrons que nous l'avons mal appliqué, car il ne suffit pas que la série en question soit convergente *le long* d'un contour, il faut qu'elle le soit à *l'intérieur* d'un contour fermé; c'est ce qui n'a pas lieu, car cette série devient divergente pour des valeurs imaginaires d'x.

Si l'on intègre la série :

$$\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(2-x)^2} + \&\cdots \frac{1}{(n-x)^2} + \cdots$$

d'après les règles indiquées entre les limites x et ∞ on trouve :

$$\frac{1}{1-x} + \frac{1}{2-x} \cdots \frac{1}{n-x} \cdots$$

Cette série est divergente. Pourquoi? C'est parce que le contour d'intégration était infini.

Enfin, considérons la série :

$$x + \frac{x^3}{3^2} + \frac{x^5}{5^2} + \frac{x^7}{7^2} +$$

convergente quand le point x varie à l'intérieur et sur le cercle de rayon 1 décrit de l'origine comme centre, en la différentiant dans l'hypothèse $x = 1$, on trouve une série divergente. Pourquoi? C'est parce que l'on a appliqué le théorème que nous venons d'énoncer à un point du contour, et qu'il n'a lieu que pour les points intérieurs.

8°

Du théorème que nous venons de démontrer on peut tirer un certain nombre de conséquences importantes, que nous allons passer en revue.

Lorsque la série :

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \cdots \varphi_n(x) \cdots \qquad (1)$$

*est convergente pour toutes les valeurs d'*x *situées à l'intérieur d'une aire* (A) *et que ses termes sont synectiques à l'intérieur de la même aire, la limite de la valeur de cette série, quand on fait tendre* x *vers* a *situé à l'intérieur de l'aire* (A), *est précisément :*

$$\varphi_1(a) + \varphi_2(a) + \cdots \varphi_n(a) + \cdots$$

C'est tout simplement une autre manière de dire que la série (1) représente une fonction continue.

Lorsque l'on veut trouver la limite de $(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}}$ on peut faire usage de ce théorème et la démonstration se simplifie beaucoup ; ainsi, on a :

$$(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}} = 1 + x + \frac{(1-\alpha)}{1\cdot 2} + \cdots \frac{(1-\alpha)(1-2\alpha)\cdots(1-\overline{n-1}\,\alpha)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n} x^n + \cdots$$

Les deux membres de cette équation sont égaux quelque soit α; leurs limites sont donc égales; mais les différents termes du second membre sont des fonctions synectiques d'α, dans le voisinage du point zéro; on aura donc sa limite en faisant $\alpha = o$, ce qui donne:

$$Lim\ (1 + \alpha x)^{\frac{1}{\alpha}} = 1 + x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \cdots \frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdots n} \cdots$$

Le même raisonnement conduit à l'Équation :

$$Lim\ \frac{1}{\alpha}\left(x^{\alpha} - 1\right) = \frac{x-1}{1} - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \cdots$$

9°

Si le produit continu :

$$\varpi_1(x)\ \varpi_2(x) \cdots \varpi_n(x) \cdots \qquad (1)$$

*est convergent pour toutes les valeurs d'*x *comprises à l'intérieur d'un contour* (A), *si pour les mêmes valeurs d'*x *les fonctions* ϖ_1, $\varpi_2 \cdots$ *restent synectiques, le produit en question représentera une fonction synectique à l'intérieur de l'aire* (A).

En effet, si nous désignons par $f(x)$ la valeur du produit continu (1) nous aurons :

$$l\ f(x) = l\ \varpi_1(x) + l\ \varpi_2(x) + \cdots l\ \varpi_n(x) + \cdots$$

Si au point x aucune des fonctions ϖ_1, $\varpi_2 \cdots$ ne s'annule, leurs logarithmes seront, en ce point, des fonctions synectiques, et, par suite, $l\,f(x)$ et $f(x)$ seront des fonctions synectiques d'x également.

Ce raisonnement tombe en défaut si au point x quelques-unes des fonctions ϖ_1, $\varpi_2 \cdots \varpi_n \cdots$ passent par zéro. Supposons le nombre des fonctions qui sont dans ce cas, limité (à 3 par exemple), on décomposera le produit (1) en deux facteurs, dont l'un se composera des trois fonctions nulles au point x, ce produit étant alors composé de deux facteurs synectiques en x, le sera lui-même.

Si, enfin, le nombre des fonctions ϖ_1, $\varpi_2 \cdots$ nulles au point x est illimité, le théorème tombe en défaut. Voici pourquoi: le nombre des fonctions nulles au point x étant illimité, le terme général ϖ_n ne saurait tendre vers l'unité quand on fait varier x très-peu, et $f(x)$ sera nécessairement encore nul quand x aura varié très-peu; mais $f(x)$ ne saurait rester nul et synectique quand x varie; donc $f(x)$ n'est pas synectique dans le cas que nous venons d'examiner.

10°

Si, lorsque x varie à l'intérieur de l'aire (A), *les fonctions* $\varpi_1(x)$, $\varpi_2(x)\cdots$ $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)\cdots$ *sont synectiques, et la fraction continue*

$$f(x) = \cfrac{\varpi_1(x)}{\varphi_1(x) + \cfrac{\varpi_2(x)}{\varphi_2(x) + \cfrac{\varpi_3(x)}{\ddots}}}$$

convergente, la fonction $f(x)$ *sera une fonction synectique d'*x *à l'intérieur de la même aire.*

En effet, Q_1, $Q_2 \cdots Q_n \cdots$ désignant les dénominateurs des réduites successives, on sait que l'on a :

$$f(x) = \frac{\varpi_1}{Q_1} - \frac{\varpi_1\,\varpi_2}{Q_1\,Q_2} + \frac{\varpi_1\,\varpi_2\,\varpi_3}{Q_2\,Q_3} - \cdots \mp \frac{\varpi_1\,\varpi_2 \cdots \varpi_n}{Q_{n-1}\,Q_n} \pm \cdots$$

et que la série composant le second membre de cette équation est convergente pour toutes les valeurs d'x comprises dans l'aire (A). Or, Q_1, $Q_2 \cdots$ sont des fonctions entières de φ_1, $\varphi_2 \cdots$; elles sont donc synectiques; les termes de la série précédente sont donc également des fonctions synectiques; donc, enfin, $f(x)$ elle-même est une fonction synectique.

11°

On peut, relativement aux séries doubles, démontrer des théorèmes analogues à ceux que nous avons démontré pour les séries simples; ainsi, on verrait facilement que :

1° *Si la série double :*

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_1^{(1)}(x) + \varphi_2^{(1)}(x) + \cdots\cdots \varphi_n^{(1)}(x)\cdots\cdots \\ + \varphi_1^{(2)}(x) + \varphi_2^{(2)}(x) + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + \varphi_1^{(m)}(x) + \varphi_2^{(m)}(x) \cdots\cdots + \varphi_n^{(m)}(x)\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \quad (1)$$

est convergente le long d'un contour (A), *et si ses termes ainsi que sa valeur sont des fonctions finies et continues, le long de ce contour, l'intégrale de sa valeur le long du contour en question s'obtiendra en intégrant chacun de ses termes le long du même contour supposé fini;*

2° *Si la série* (1) *a tous ses termes synectiques, si de plus sa valeur est une fonction synectique au point* a, *on obtiendra la différentielle de sa valeur en ce point en différentiant chacun de ses termes;*

3° *Si les modules maximum des termes de la série* (1) *à l'intérieur d'un petit cercle de rayon* r, *si petit que l'on voudra, mais fini, décrit autour du point* a *comme centre, est convergente; si, de plus, tous les termes de la série* (1) *sont synectiques en* a, *la valeur de la série* (1) *sera une fonction synectique d'*x *au point* a;

4° *La série double, dont le terme général est:*

$$\varphi_n^{(p)}(x)\,\frac{\operatorname{Sin}^4 2\pi(t-n)\ \operatorname{Sin}^4 2\pi(s-p)}{\{2\pi(t-n)\}^2\ \{2\pi(s-p)\}^2} \qquad (2)$$

et dans laquelle les fonctions φ *sont synectiques à l'intérieur de l'aire* (A), *représente une fonction synectique d'*x *à l'intérieur de cète aire lorsque la série* (1) *est elle-même convergente, et de* s *et de* t *dans toute l'étendue du plan. Enfin, la série double formée par les modules maximum de ses termes, quand* x, s, t *varieront à l'intérieur de cercles finis, sera encore convergente.*

Ce théorème s'établira comme son corrélatif dans la théorie des séries simples quand on aura établi la convergence de la série:

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{1}{1^4}\,\frac{1}{1^4}+\frac{1}{1^4}\cdot\frac{1}{2^4}+\cdots\cdots\ \frac{1}{1^4}\cdot\frac{1}{n^4}+\cdots\cdot \\
\frac{1^4}{2^4}\,\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}\cdot\frac{1}{2^4}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{1}{3^4}\cdot\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}\cdot\frac{1}{2^4}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}\right\}\qquad (3)$$

A cet effet, on groupera les termes qui se trouvent dans le carré dont la diagonale a pour extrémités $\frac{1}{1^4}\cdot\frac{1}{1^4}$ et $\frac{1}{n^4}\,\frac{1}{n^4}$ de la manière suivante:

$$\frac{1}{1^4}\cdot\frac{1}{1^4}+\left\{\frac{1}{1^4}\cdot\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^4}\cdot\frac{1}{1^4}\right\}+\left\{\frac{1}{1^4}\cdot\frac{1}{3^4}+\frac{1}{2^4}\cdot\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}\cdot\frac{1}{1^4}\right\}\cdots$$

On obtient ainsi une somme moindre que:

$$\frac{1}{1^4}\cdot\frac{1}{1^4}+\left\{\frac{1}{2^4}\right\}\cdot 2+\left\{\frac{1}{3^4}\right\}3\ \cdots\ \&\ \cdots$$

ou que :

$$\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots \frac{1}{n^3}$$

c'est-à-dire finie quand n augmente indéfiniment. Si l'on suppose alors que l'on fasse croître d'une manière quelconque le nombre des termes pris dans la série (3), ces termes pourront toujours être compris dans un carré, et par conséquent leur somme restera moindre que la limite s de ce carré ; mais cette somme croît à mesure que l'on prend des termes en plus, elle croît sans dépasser s, elle a donc une limite, et par conséquent la série (3) est convergente.

5° *Il résulte du 4ᵉ Théorème que la série dont le terme général est l'expression* (2) *représente une fonction synectique à l'intérieur de l'aire* (A), *et que* en désignant par $\psi\ (x,\ s,\ t)$ sa valeur, la série (1) pourra s'écrire sous la forme d'une série double ayant pour terme général $\psi\ (x,\ n,\ p)$', ou bien encore sous cette autre forme :

$$\mathcal{E}_{(s)}\ \mathcal{E}_{(t)}\ \frac{\Psi\ (x,\ s,\ t)\ (z\,\pi\sqrt{-1})^2}{\left(\left(e^{2\pi s\sqrt{-1}}-1\right)\right)\left(\left(e^{2\pi t\sqrt{-1}}-1\right)\right)}$$

Ce double résidu se transforme ensuite en intégrales doubles, fonctions synectiques d'x ; donc :

Lorsque la série (1) *sera convergente à l'intérieur de l'aire* (A), *et que ses termes seront des fonctions synectiques d'*x *dans la même aire :*

*1° Elle représentera une fonction synectique d'*x ;

2° On différentiera ou on intégrera sa valeur en différentiant ou en intégrant chacun de ses termes.

Et ce théorème est soumis aux mêmes restrictions que son corrélatif sur les séries simples.

Ce que nous venons de démontrer pour les séries doubles s'étendrait avec la plus grande facilité aux séries triples.

12°

Souvent les séries qui définissent les fonctions sont peu convergentes; on réussit, en s'appuyant sur les principes précédents, à transformer les séries en d'autres plus convergentes. Considérons, par exemple, la fonction définie par la série :

$$\varphi\ (x) = \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(2-x)^2} \cdots \frac{1}{(n-x)^2} + \cdots \qquad (1)$$

Cette fonction $\varphi\ (x)$ est synectique dans toute l'étendue du plan, excepté aux points 1, 2, 3 $\cdots n \cdots$ D'après ce que nous avons vu, il en résulte, en vertu d'un théorème de Cauchy, qu'elle est développable par la formule de Mac-Laurin, pour toutes les valeurs du module d'x comprises entre o et 1. Alors, en appliquant les principes sur la différentiation des suites, § (7), on trouve :

$$\varphi(o) = s_2\ ,\ \varphi'(o) = 2\ s_3 \cdots \varphi^{(n)}\ (o) = 1\ ,\ 2,\ 3 \cdots (n+1)\ s_{n+2}$$

En désignant, en général, par s_n la valeur de la série :

$$\frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n} \cdots + \frac{1}{p^n} + \cdots$$

On aura donc, pour toutes les valeurs du module d'x, comprises entre o et 1 :

$$\varphi(x) = s_2 + 2\ s_3\ x + 3\ s_4\ x^2 \cdots + (n+1)\ s_{n+2}\ x^n + \cdots$$

Cette série est beaucoup plus convergente que (1), surtout pour les petites valeurs de x, les autres valeurs d'x se calculeraient au besoin par la formule :

$$\varphi(x+1) = \frac{1}{x^2} + \varphi\ (x)$$

obtenue en changeant x en $x+1$ dans la formule (1).

En suivant une marche analogue à celle que nous venons de développer on prouverait que :

$$\frac{1}{2\ (2-x)} + \frac{1}{3\ (3-x)} \cdots \frac{1}{n\ (n-x)} \cdots = (s_2-1) + (s_3-1)\ x \cdots + (s_n-1)\ x^{n-2} + \cdots$$

Cette formule donne pour $x = 1$:

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots = \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots \\ + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \cdots \\ + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \&\ \cdots\cdots\cdots \\ + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right.$$

Or, on a :

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} \cdots = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots = 1$$

Ainsi donc : *la somme des inverses de toutes les puissances des nombres est égale à* 1. Ce théorème se vérifie directement d'une manière très-facile.

Enfin, la meilleure manière de développer $tg\,x$ en série ordonnée suivant les puissances croissantes d'x, consiste à partir de la formule :

$$tg\,x = \frac{2\,x}{\frac{1^2\,\pi^2}{4} - x^2} + \frac{2\,x}{\frac{3^2\,\pi^2}{4} - x^2} + \cdots \frac{2\,x}{\frac{(2\,n+1)^2\,\pi^2}{4} - x^2} + \cdots$$

et à calculer les dérivées successives de cette fonction, comme nous l'avons fait dans les deux exemples précédents. Le calcul direct des dérivées de $tg\,x$ serait au contraire excessivement pénible.

Permis d'imprimer :

Le 4 janvier 1865.

Le Recteur de l'Académie de Nancy,

C. DUNOYER.

Vu et approuvé :

Le 4 janvier 1865.

Le Doyen de la Faculté des sciences,

A. GODRON.



QUESTIONS PROPOSÉES PAR LA FACULTÉ.

1° Mouvement elliptique des Planètes autour du soleil. — Cas des Perturbations.

Solution du Problème de Kepler.

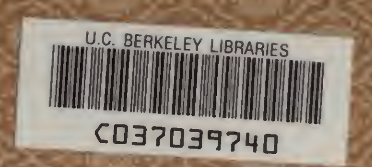
Déterminer la masse de la Terre et celle des Planètes, accompagnées de leurs satellites.

2° Mouvement d'un projectile dans un milieu résistant.

3° Théorie des Roues hydrauliques.



METZ. — IMP. DE V. MALINE.


U.C. BERKELEY LIBRARIES
C037039740

